

Объемное напряженное состояние

Напряжения в любой площадке при известных главных напряжениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

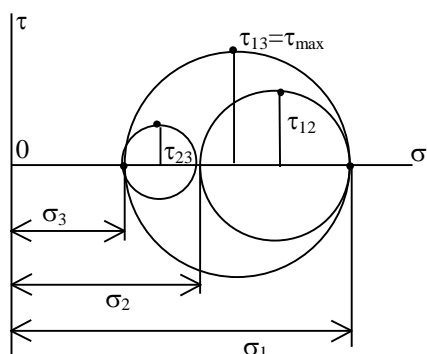
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3;$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы между нормалью к рассматриваемой площадке и направлениями главных напряжений.

Наибольшее касательное напряжение: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Оно действует по площадке параллельной главному напряжению σ_2 и наклоненной под углом 45° к главным напряжениям σ_1 и σ_3 .



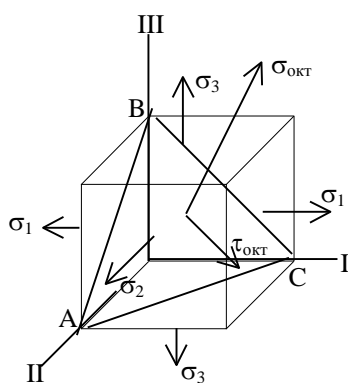
Круг Мора для объемного напряженного состояния.

Точки, являющиеся вершинами кругов соответствуют диагональным площадкам, наклоненным под 45° к

главным напряжениям: $\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ (иногда называют главными касательными напряжениями).

Плоское напряженное состояние — частный случай объемного и тоже может быть представлено тремя кругами Мора, при этом одно из главных напряжений должно быть равно 0. Для касательных напряжений также, как и при плоском напряженном состоянии, действует закон парности: составляющие касательных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны по величине и обратны по направлению.



Напряжения по октаэдрической площадке.

Октаэдрическая площадка (ABC) — площадка, равнонаклоненная ко всем главным направлениям.

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

Октаэдрическое нормальное напряжение равно среднему из трех главных напряжений.

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

или

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2},$$

Октаэдрическое

касательное напряжение пропорционально геометрической сумме главных касательных напряжений.

Интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам есть постоянная величина, равная сумме главных напряжений (первый инвариант).

Деформации при объемном напряженном состоянии.

Обобщенный закон Гука (закон Гука при объемном напряжении):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — относительные удлинения в главных направлениях (главные удлинения). Если какие-либо из напряжений σ_i будут сжимающими, то их необходимо подставлять в формулы со знаком минус.

Относительная объемная деформация:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\theta = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Изменение объема не зависит от соотношения между главными напряжениями, а зависит от суммы главных напряжений. Т.е. элементарный кубик получит такое же изменение объема, если к его граням будут приложены одинаковые средние

напряжения: $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, тогда $\theta = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} 3\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}$, где $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$

— модуль объемной деформации. При деформации тела, материал которого имеет коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$ (например, резина) объем тела не меняется.

Потенциальная энергия деформации

При простом растяжении (сжатии) потенциальная энергия $U = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$.

Удельная потенциальная энергия — количество потенциальной энергии,

накапливаемое в единице объема: $u = \frac{U}{F \cdot L} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}$; $u = \frac{\sigma^2}{2E}$. В общем случае

объемного напряженного состояния, когда действуют три главных напряжения:

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

Полная энергия деформации, накапливаемая в единице объема, может рассматриваться как состоящая из двух частей: 1) энергии u_0 , накапливаемой за счет изменения объема (т.е. одинакового изменения всех размеров кубика без изменения кубической формы) и 2) энергии u_ϕ , связанной с изменением формы кубика (т.е. энергии, расходуемой на превращение кубика в параллелепипед). $u = u_0 + u_\phi$.

$$u_0 = \frac{1 - 2\mu}{6 \cdot E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad u_\phi = \frac{1 + \mu}{3 \cdot E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3]$$

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} — \text{тензор напряжений (матрица третьего порядка)}.$$

При переходе к главным напряжениям тензор напряжений получает вид:

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \text{ При повороте системы координат коэффициенты тензора}$$

меняются, сам тензор остается постоянным. Три инварианта напряженного

$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$ $J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2;$ $J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.$	состояния: Аналогичные зависимости возникают при рассмотрении деформированного состояния в точке.
--	---

Сопоставление зависимостей напряженного и деформированного плоского состояния (аналогия):

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha & \varepsilon_\alpha &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha & \frac{\gamma_\alpha}{2} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

ε_α — относительная деформация, γ_α — угол сдвига.

Та же аналогия сохраняется и для объемного состояния. Поэтому имеем инварианты деформированного состояния:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ J_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2; \\ J_3 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} — \text{тензор деформаций}. \end{aligned}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — компоненты деформированного состояния.

Для осей, совпадающих с направлениями главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, тензор

деформаций принимает вид: $T_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$